4

Humberto José Bortolossi

MOVIMIENTOS, PENSAMIENTOS Y GEOGEBRA: ALGUNOS ASPECTOS NEUROCIENTÍFICOS EN ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.249-270

INTRODUCCIÓN

GeoGebra es conocido por ser un *software* de matemática dinámica. Aquí, la palabra *dinámica* se refiere a la capacidad del aplicativo traer movimiento a las construcciones: por ejemplo, diferente de lo que ocurre con regla y compás habituales, cuando mueve los elementos geométricos de la construcción, las relaciones geométricas entre eses elementos son mantenidas (pertinencia, paralelismo, perpendicularidad, etc.), generando, así, una variedad de ejemplos de una misma situación geométrica.

La literatura ha apuntado muchos beneficios de ese dinamismo: combatir los efectos de configuraciones prototípicas (MACHADO; BORTOLOSSI; ALMEIDA JUNIOR, 2019), descubrir y entender los invariantes geométricos estableciendo una cadena de raciocinios con argumentación lógica y deductiva (GRAVINA, 1996), y comprensión del pensamiento funcional y de la dependencia y la variación de parámetros por medio de la construcción de escenarios animados y simulaciones (BASNIAK, 2019).

Nuestro objetivo en ese trabajo, es apuntar para otra perspectiva sobre el importante papel que el movimiento a través del dinamismo juga en el contexto de enseñanza y aprendizaje: la perspectiva de la Neurociencia y de la Psicología. Para ello, presentamos algunos resultados de trabajos de Pawan Sinha (profesor de visión y neurociencia computacional del Departamento de Ciencias Cerebrales y Cognitivas de MIT en EEUU) y de Barbara Tversky (experta en Psicología cognitiva, profesora emérita de Psicología en Stanford University y profesora de Psicología y Educación en Teachers College, Columbia University, en EEUU). Finalizamos presentando dos actividades con GeoGebra que hemos desarrollado con soporte en las teorías presentadas en una asignatura de la facultad de educación en Matemática de la

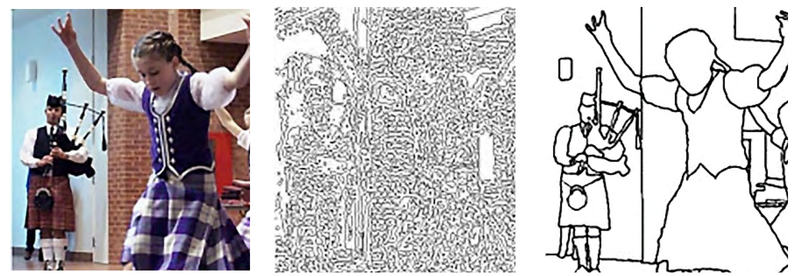
Universidade Federal Fluminense: geometría espacial con realidad aumentada en *smartphones* y tabletas e ingeniería reversa en animaciones matemáticas artísticas.

PAWAN SINHA Y CÓMO EL CEREBRO APRENDE A VER

En una conferencia en *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) en 2007, Pawan Sinha compartió la situación de las personas ciegas en India: 1 en cada 100 indios es ciego y existen más de 1 millón de niños indios ciegos, y 60% de eses casos podrían ser evitados o tratados, pero solamente 20% lo son. ¿Por qué no ocurre el tratamiento? Existen numerosas razones: menos de 10% de los hospitales tienen unidad pediátrica; los médicos de oftalmología pediátrica están concentrados en las grandes ciudades (Nueva Delhi concentra 12% de todos los expertos en oftalmología de India); 75% de las personas ciegas de India viven en pueblos y la mayoría no tiene dinero para el tratamiento. Otra razón que llama la atención es la creencia de que un niño, después de 4 o 5 años de edad, pasaría de su período crítico visual, es decir, ya *no podría aprender a ver*.

Aquí, *ver* significa identificar formas geométricas 2D y 3D, independientemente de la posición y la escala, determinar cuáles objetos están más cercanos y cuáles están más lejos, identificar colores, reconocer rostros, identificar hacia adonde una persona está mirando, entre otras situaciones. Quien ya ha aprendido a ver desde su nacimiento, puede no alcanzar a percibir lo complejo de este proceso. Imagine usted que adquiere la visión siendo adulto y mira una imagen como la de la Figura 1 (A). ¿Cómo decodificar toda la información visual de color y luminiscencia para saber dónde termina un objeto y comienza otro? Especialmente ¿cómo identificar contornos (segmentación) y hacer una integración visual de forma de tener informaciones semánticas sobre los objetos de la escena, como de la Figura 1 (C) y no como de la Figura 1 (B)?

Figura 1 – Segmentación/integración visual de una imagen



(A) *(B)* *(C)*

Fuente: Ostrovsky *et al.* (2009, p. 1485).

El supuesto de que personas con ceguera congénita no podrían aprender a ver después de 4 o 5 años surgió de los trabajos de los neuro fisiologistas David H. Hubel (1926-2013) y Torsten Nils Wiesel (1924-), que identificaron la existencia de un *período crítico visual* en crías de gato. Los investigadores, por medio de experimentaciones, comprobaron que, si se cubre el ojo de un cría de gato entre el décimo cuarto y trigésimo día para que solamente un lado de la corteza visual recibiese estímulos visuales, el animal se quedaría permanentemente ciego de ese ojo. Sin embargo, si ese mismo ojo fuese cerrado un mes después del nacimiento, ningún cambio ocurriría en el cerebro y la visión del gato se iba volver a su normal después de retirado el cierre del ojo. Hubel y Torsten recibieron un Premio Nobel en 1981 por sus estudios sobre períodos críticos en el desarrollo visual de mamíferos.

Pawan Sinha (2009), sin embargo, creyendo que la extrapolación para seres humanos de los resultados sobre períodos críticos obtenidos con crías de gato no fue debidamente probada, concibió el Proyecto

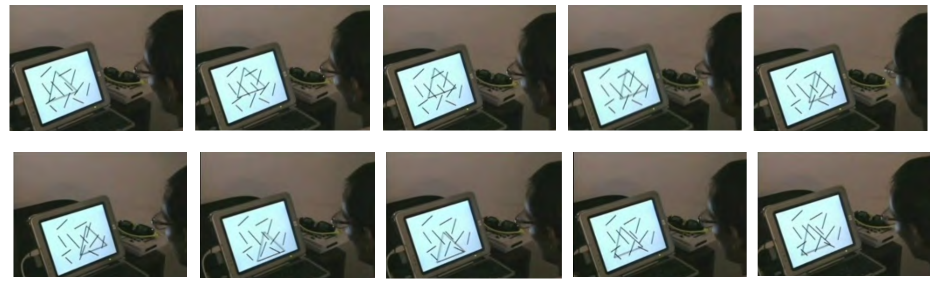
Prakash (https://www.projectprakash.org/). El objetivo del proyecto (entre otros) es el de enseñar ciegos congénitos (con catarata congénita, por ejemplo), a ver después someterse a una cirugía. Sinha desarrolló un esquema de tratamiento de 40 semanas que, de hecho, generaba la capacidad de ver en niños, adolescentes y adultos con ceguera congénita. Segun el investigador, uno de los elementos centrales del tratamiento es el *movimiento* (OSTROVSKY *et al.*, 2009): "La única cosa que el sistema visual precisa para comenzar a analizar el mundo es información dinámica". Las Figuras 2 y 3 ilustran una experiencia en que la cuestión del movimiento aparece en la identificación de objetos.

Figura 2 – Dificultad de identificar un triángulo equilátero en una imagen estática

Fuente: Sinha (2009 – video).

En la Figura 2, la imagen exhibida en la pantalla del ordenador es estática. Usted debe haber identificado el triángulo equilátero en ella. La persona india de la imagen, que también observa la escena estática y que ha recuperado la visión después de adulto, no lo consigue. Sin embargo, cuando el triángulo equilátero es puesto en movimiento (Figura 3), la persona india consigue identificarlo. En el intervalo (11:14-11:54) de Sinha (2009) es posible encontrar este y otro ejemplo.

Figura 3 – El movimiento permite identificar un triángulo equilátero en una animación



Fuente: Sinha (2009 – video).

Así, Pawan Sinha ha conseguido mostrar, con su Proyecto Prakash: (1) que el período crítico visual descubierto em crías de gato no se les aplica a humanos, pues ellos poseen plasticidad visual (es decir, capacidad de adaptación del aparato visual del cerebro) que les ayuda en el aprendizaje visual, y (2) que el movimiento es fundamental en ese aprendizaje.

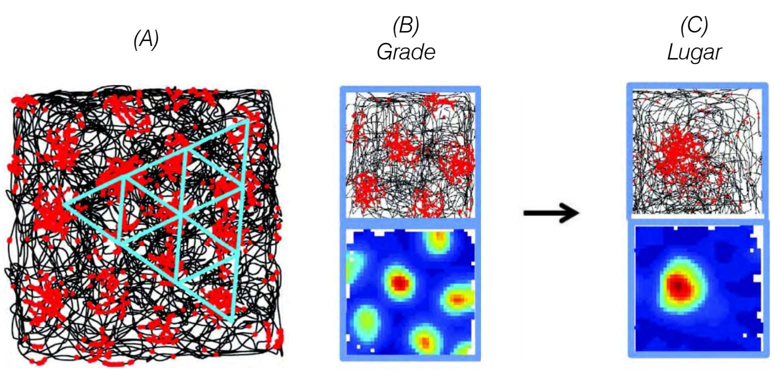
La investigación de Sinha tuvo desarrollos: el descubrimiento de que las ilusiones ópticas como la de Ponzo y de Müller-Lyer (https://bit.ly/2B8H3bc) no son culturalmente construidas y, sí, parecen ser innatas (CHATTERJEE, 2015), y que una de las características del autismo es la dificultad de predicción de movimientos (SINHA *et al.*, 2014).

Para cerrar este apartado, traemos una metáfora para reflexión: las personas aquí descritas son especiales, ellas son como singularidades de un campo vectorial. Como la teoría de sistemas dinámicos bien nos enseña, lo que hemos aprendido con las singularidades nos dice mucho sobre los otros puntos (regulares). El estudio y el descubrimiento de esquemas que son esenciales para las personas especiales también se muestran mucho útiles para las otras personas. El movimiento es uno de esos esquemas.

BARBARA TVERSKY, MAPAS COGNITIVOS Y LOS PENSAMIENTOS ESPACIAL Y ABSTRACTO

En la Figura 4, el gabarato negro describe el movimiento de un ratón moviendose en una caja de base cuadrada (las imágenes exhiben la trayectoria del ratón cuando la caja es mirada desde arriba). Electrodos fueron implantados en neuronas del hipocampo y de la corteza entorrinal de los ratones para acompañar su actividad durante la experimentación. En 1971, los neurocientíficos John O'Keefe y John Dostrovsky descubrieron que células del hipocampo disparaban (emitían una señal eléctrica más frecuente) cuando el ratón estaba en determinados lugares que ya conocía (Figura 4 (C)), como el centro de la caja o en una posición adonde se había hecho alguna marca, como el dibujo de una estrella. Esas neuronas fueron llamadas de *células de lugar* (*place cells,* en inglés). Esto mostró que, en ratones, el hipocampo contiene un tipo de mapa cognitivo del ambiente espacial donde el animal se mueve. Segundo Kandel *et al*. (2014), esa fue la primera evidencia para una representación neural del ambiente, que permite que el animal se mueva de manera deliberada por él.

Figura 4 – El movimiento permite identificar un triángulo equilátero en una animación



Fuente: Moser, Rowland y Moser (2015, p. 3).

De acuerdo con Bear, Connors y Paradiso (2017), se desconoce si existen o no células de lugar en el encéfalo humano. Todavía, estudios utilizando tomografía por emisión de positrones (TEP) han revelado que el hipocampo humano es activado por situaciones que involucren navegación virtual o imaginaria a través del ambiente. Los autores también mencionan un estudio hecho con conductores de taxi en Londres que, para consiguieren una licencia, precisan pasar una prueba rigurosa. Londres posee numerosos puntos de interés distribuidos en sus casi 25 mil calles. Comparando con el grupo de control, los conductores de taxi mostraron poseer un hipocampo posterior mayor e hipocampo anterior más pequeño, por lo tanto, hay correlación entre el tamaño del hipocampo posterior y el tiempo de experiencia del conductor de taxi.

May-Britt Moser, Edvard I. Moser y John O'Keefe, premios Nobel de Medicina de 2014, junto con colaboradores, descubrieron otro tipo de célula, las *células de red* (*grid cells*, en inglés), que también mapean el espacio, pero de una manera diferente. Ubicadas en la corteza entorrinal, las células de red disparan siempre que el animal esté en cualquier de los nudos de una malla triangular, como en las Figuras 4 (A) y (B) (en la comunidad de neurociencia, la malla es vista como hexagonal). Este sistema de referencia permite una ubicación que es independente de marcas específicas, de señales del ambiente y del contexto, por lo tanto, es alocéntrica (y no egocéntrica). La frontera de la malla corresponde a la frontera natural del ambiente siendo explorado. Cuando un nuevo local es explorado, la malla puede ser calibrada de nuevo, reorientada y, así, adaptada con la nueva situación.

El hecho sorprendente es que, como muestran medidas indirectas de la actividad neural y experiencias con voluntarios con tareas especialmente concebidas (por ejemplo, recordar los ítems de una lista que fue memorizada), las células de lugar y de red muestran tener otras funcionalidades, además de servir como mapa cognitivo espacial advenido de la necesidad evolutiva de movimiento y acción para la sobrevivencia de la especie. De acuerdo con Tversky (2019), células de lugar también disparan con eventos, personas e ideas, y la malla de las células de red es usada para funcionar con informaciones conceptuales, temporales y sociales. De esa manera, el pensamiento espacial y el movimiento asociado a ese tipo de pensamiento son la base (pero no toda la construcción) de los otros tipos de pensamiento: mapas espaciales son usados como mapas conceptuales que permiten el pensamiento abstracto. Así como nuestros pies se mueven de un lugar para otro por caminos espaciales, nuestras mentes se mueven de pensamiento en pensamiento por caminos conceptuales. Espacial, aquí, no significa geométrico o analítico, sino como un gráfico topológico: qué está ligado con qué. Tversky (2019) da el ejemplo de la boca como otro ejemplo de estructura que evoluciona para ganar nuevas funcionalidades: su función primaria es de alimentación, pero la usamos para hablar, silbar, tocar flauta y besar.

Es importante observar cuales características y limitaciones del mapa espacial pueden tener implicaciones para los mapas conceptuales basados en él. Por ejemplo, es reconocida la distorsión existente en la estimación de distancias: somos más precisos con cosas más cercanas y menos precisos con puntos de referencia más distantes. Hay una distorsión similar en estimaciones de dimensión social: las personas acostumbran juzgar a personas más cercanas de su convivencia social de manera diferente a miembros de otros grupos sociales más distantes. Otro ejemplo: en el que se refiere al tiempo, eventos distantes en el pasado en general son considerados próximos uno del otro, pero eventos más recientes, cercanos a nosotros, son considerados más apartados. En términos de número, discriminar grandes cantidades es más difícil que discriminar pequeñas cantidades (Ley de Weber-Fechner).

Como observa Tversky (2019), a pesar de incompletos, ambiguos, inconsistentes y sesgados, esos aparatos espaciales mentales juegan un papel fundamental en nuestras vidas y en nuestras imaginaciones: ellos permiten vislumbrar otros mundos, mundos que aún no fueron vistos, y también mundos imposibles – mundos de ficción, del arte y de la ciencia.

UN EJEMPLO DEL PODER DEL MOVIMIENTO: EL EFECTO MCGURK

Algunas partes del cerebro reaccionan específicamente a estímulos relacionados con movimiento, como la corteza temporal medial y la corteza temporal medial superior. Fotos estáticas de objetos en movimiento (como un jugador de baloncesto lanzando una pelota) activan esas regiones, mientras qe fotos de poses estáticas no.

Un ejemplo clásico que demuestra como el movimiento influencia el cerebro es el conocido Efecto McGurk. Asiste al video https://youtu.be/CE-I6UqYR78. Es importante que usted mantenga sus ojos en la boca del presentador y trate de entender lo que él está hablando (¿“ba”, “da”, “fa”, “pa” o “ga”?) Vuelva al inicio del video y, ahora, con los ojos cerrados, intente identificar lo que él está hablando (¿“ba”, “da”, “fa”, “pa” o “ga”?) ¿La respuesta fue la misma en los dos casos? Durante todo el video, el presentador está hablando “ba”, pero en el inicio (cuando él está a la izquierda de la pantalla), hubo una edición de imagen y los movimientos labiales son de “pa”. ¡Los movimientos de los labios influencian y cambian la interpretación de lo que usted está oyendo!

Ese tipo de fenómeno fue primero descrito en 1976, por los psicólogos Harry McGurk y John MacDonald en la revista científica

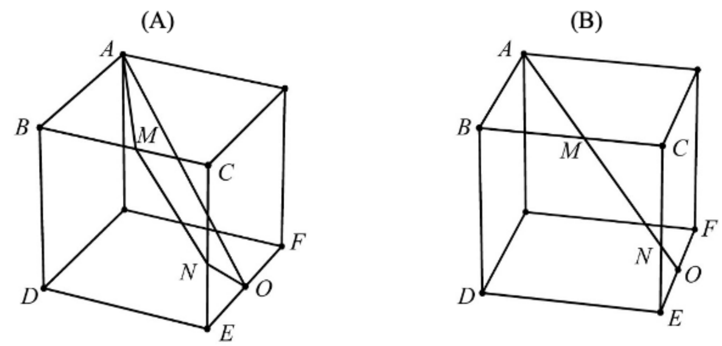
Nature, con el artigo *Hearing Lips and Seeing Voices* (Oír Labios y Ver Voces). El efecto es resistente: tener consciencia del efecto no lo elimina.

Individuos disléxicos exhiben un Efecto McGurk más leve que los lectores normales de la misma edad cronológica, pero exhiben el mismo grado de intensidad que lectores del mismo nivel de lectura. Ciertas condiciones disminuyen el Efecto McGurk: disturbios del espectro de autismo, Dolencia de Alzheimer, esquizofrenia y afasia. La intensidad del Efecto McGurk puede cambiar entre los idiomas: oyentes en los idiomas holandés, inglés, español, alemán, italiano y turco experimentan un efecto robusto de McGurk, mientras es más leve para oyentes japoneses y chinos. Mujeres muestran un Efecto McGurk más pronunciado que los hombres.

MOVIMIENTOS, PENSAMIENTOS Y GEOGEBRA: GEOMETRÍA ESPACIAL CON REALIDAD AUMENTADA EN SMARTPHONES Y TABLETAS

Respecto de la Geometría Espacial, una de las dificultades que los alumnos enfrentan es la tarea de reconstruir mentalmente una imagen tridimensional desde una figura bidimensional estática impresa en la página de un libro, o dibujada en la pizarra por el profesor. Como la Geometría Proyectiva bien nos enseña, ese tipo de procedimiento hace posible la ambigüedad, pues dos objetos diferentes pueden tener una misma proyección plana (VOLKERT, 2008). Por ejemplo, en el cubo de la Figura 5 (A), si *M, N* y *O* son los puntos medios de las aristas *BC, CE* y *EF* respectivamente, entonces el segmento *AO* y el camino poligonal formado por la yuxtaposición de los segmentos *AM, MN* y *NO*, vistos de una posición específica, poseen la misma proyección que el diseño en la Figura 5 (B).

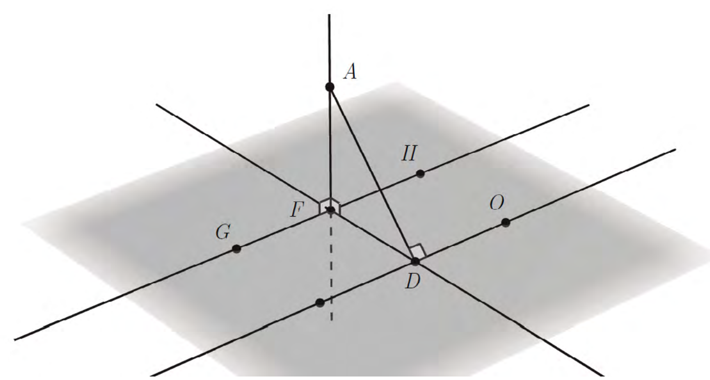
Figura 5 – Un ejemplo de ambigüedad en proyección en perspectiva



Fuente: Desarrollada por el autor.

Otro aspecto que hace complicado en las representaciones 2D de objetos 3D: ángulos frecuentemente aparecen deformados. Considere, por ejemplo, la Figura 6. Los ángulos *AFG, AFD* y *ADO*, en configuración 3D, son todos rectos, pero en la representación 2D correspondiente, obtenida por una proyección en perspectiva, no lo son.

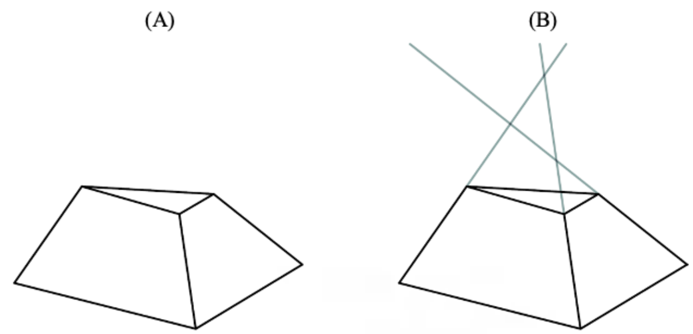
Figura 6 – Deformaciones de ángulos en una proyección en perspectiva



Fuente: Elaboración propia.

Aún más: existen representaciones 2D de objetos 3D que, en un primer momento, pueden parecer adecuadas, pero que de hecho, no lo son. Un ejemplo clásico es la Pirámide de Huffman (HUFFMAN, 1977). El diseño de la Figura (A), parece ser la representación de un tronco de pirámide de base triangular, pero como muestra el dibujo en (B), ese no es el caso.

Figura 7 – Pirámide de Huffman

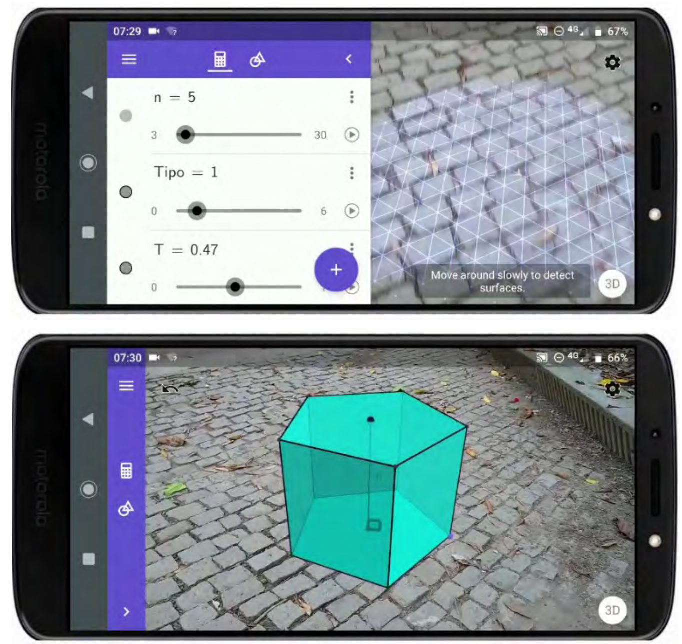


Fuente: Elaboración propia.

Todos los ejemplos muestran que, para entender mejor un objeto tridimensional, es necesario observarlo desde diferentes posiciones. Ciertamente el uso de materiales concretos es un recurso didáctico indispensable, especialmente en los primeros años de educación escolar. Por otra parte, existen ciertas configuraciones y propiedades geométricas que son difíciles de representar concretamente, debido a limitaciones de orden técnica. Sumado al gusto de los alumnos por el ordenador, la tableta, el *smartphone* y softwares como GeoGebra, entonces, se ponen como herramientas promisoras para la enseñanza de Geometría Espacial. Ese potencial se hace más amplio con recursos como el de Realidad Aumentada.

En versiones más recientes del GeoGebra para tabletas y *smartphones*, construcciones hechas en la vista 3D pueden ser proyectadas en superficies planas en realidad aumentada: se activa el modo AR (realidad aumentada), se apunta la camera del dispositivo a una superficie, se camina para que la superficie sea detectada (una malla triangular va a aparecer), se toca en la pantalla para iniciar la proyección en realidad aumentada (Figura 8). Observamos que la tecnología implementada en GeoGebra Realidad Aumentada no necesita el uso de tarjetas o páginas impresas, basta con el dispositivo.

Figura 8 – Realidad Aumentada con GeoGebra en un teléfono celular



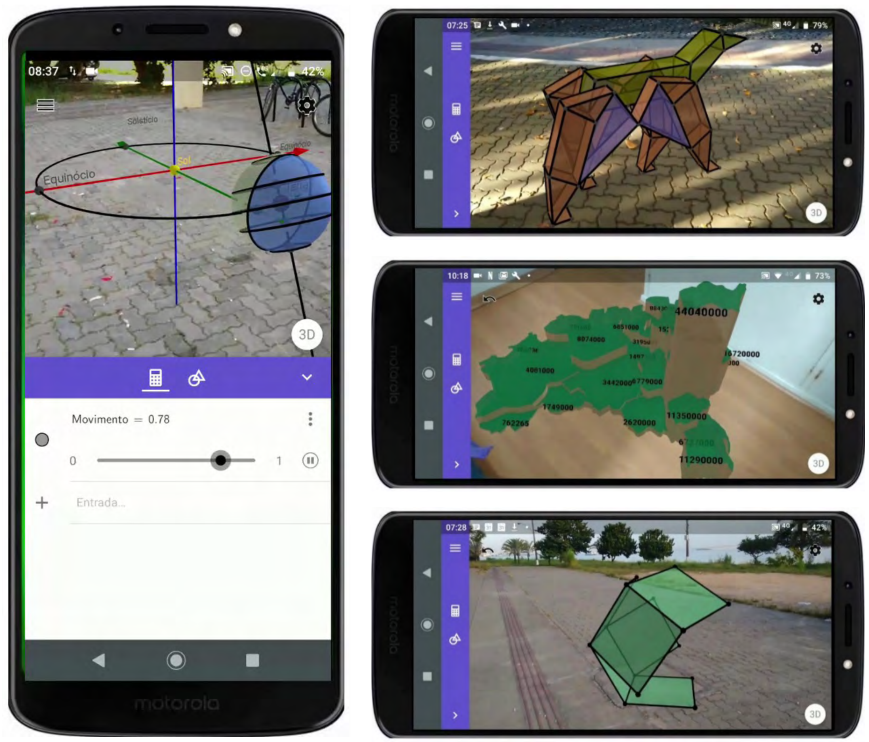
Fuente: Acervo del autor (2019 – https://youtu.be/l2B-RS6xrvg).

Luego de proyectar el objeto 3D, el usuario puede ampliarlo, disminuirlo y girarlo; caminar alrededor y dentro de él; cambiar elementos libres, semilibres y parámetros; realizar construcciones

sumario

geométricas directamente en la proyección; cambiar la apariencia de los objetos (color, grosor, etc.); tomar medidas; y todo en tiempo real (TRAPPMAIR; HOHENWARTER, 2019). Numerosos ejemplos de construcciones con GeoGebra Realidad Aumentada están disponibles en esta *playlist* de YouTube: https://bit.ly/2Yca39v.

Figura 9 – Ejemplos de construcciones con GeoGebra Realidad Aumentada



Fuente: Acervo del autor (2019 – https://bit.ly/2Yca39v).

Pero, ¿cuáles ventajas tiene la Realidad Aumentada frente al modo tradicional de la vista 3D de GeoGebra? Además de los ejercicios de modelación, es decir, construir modelos matemáticos 3D que se sobreponen a los objetos del mundo real, como envases y embalajes (TRAPPMAIR; HOHENWATER, 2019), es nuestra intención apuntar que la tecnología de Realidad Aumentada permite otro tipo de movimiento: aquel del cuerpo del propio usuario cuando interactúa con la escena y la visualiza de posiciones y ángulos de encuadramientos diferentes. En la vista 3D tradicional, el usuario se queda sentado en una silla y mueve la escena en la pantalla del dispositivo. En el modo de Realidad Aumentada, el propio usuario tiene que se moverse por la escena.

La importancia de los gestos y del cuerpo en la comunicación y cognición han sido apuntada por diferentes referencias: Clark (1998), Lakoff y Nuñez (2001), Wilson (2002), Gallagher (2006), Alibali y Nathan (2011), Edwards, Ferrara y Moore-Russo (2014), Freitas y Sinclair (2014), Krause (2015) y Pfeifer y Bongard (2019).

Tversky (2019) -en el capítulo cinco de su obra- reporta numerosas experiencias que hacen evidente el papel de los gestos en el pensamiento. En uno de ellos, los participantes debían describir oralmente relaciones espaciales (por ejemplo, reportar como irse de su casa al trabajo). Aquellos que estaban sentados sobre sus manos (entonces impedidos de moverlas) mostraron dificultades para encontrar palabras al hacer su descripción. El acto de inhibir el movimiento hace más difícil el habla, dificulta el pensamiento. Al igual que las personas ciegas de nacimiento, ya sean jóvenes y adultos que nunca han visto a otras personas haciendo gestos, también usan gestos para comunicarse. Segun Tversky (2019), los gestos nos ayudan a hablar, pensar, cambiar los pensamientos de otros, hacer matemática y música, y promover interacciones sociales.

En este contexto, cuando se concibe y se interactúa con construcciones tridimensionales en el módulo de Realidad Aumentada de GeoGebra, el cuerpo y la mente de los alumnos, de manera entrelazada, aprenden estructuras de espacio que son base para otros tipos de pensamientos.

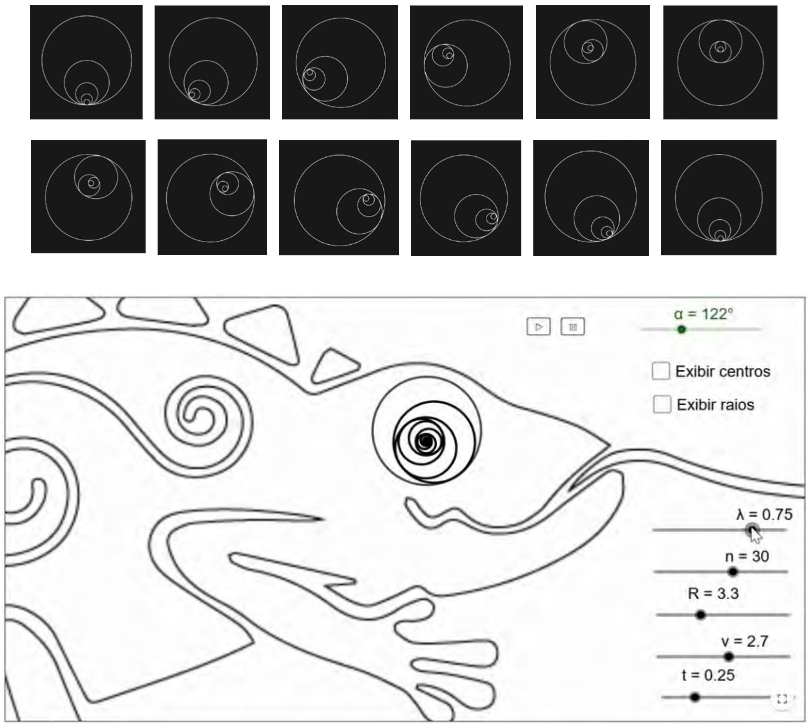
MOVIMIENTOS, PENSAMIENTOS Y GEOGEBRA: INGENIERÍA REVERSA EN ANIMACIONES MATEMÁTICAS ARTÍSTICAS

En los grupos y perfiles relacionados con Matemática en las redes sociales, es común encontrar pequeñas animaciones artísticas con motivación matemática. Una búsqueda por los siguientes *hashtags* puede traer una muestra de ese género artístico: #mathart, #geometric y #animation, #codeart, #proceduralart, #generativeart, #algorithmicart. Tal tipo de actividad se encuadra en la educación STEAM (*Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics*), un abordaje que procura promover el aprendizaje de manera interdisciplinaria y holística, integrando las asignaturas de Ciencias, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemática, estimulando el compromiso, la experimentación, la creatividad, la innovación, la curiosidad, la investigación, la colaboración, la resolución de problemas, el uso y la validación de modelos (KHINE; AREEPATTAMANNIL, 2019).

Uno de los trabajos desarrollados en la asignatura *Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas* para la facultad de educación presencial en Matemática de la *Universidade Federal Fluminense*, los alumnos deben dividirse en grupos y cada grupo es responsable por una animación artística. El desafío propuesto es reconstruir la animación en GeoGebra. La Figura 9 exhibe un ejemplo con 12 cuadros de la animación artística y su reconstrucción en GeoGebra. La animación de los círculos encajados era similar al ojo de un camaleón, y se incluyó en la construcción GeoGebra un diseño del animal. Otros ejemplos pueden ser encontrados aquí: https://bit.ly/2XEGvlv.

sumario

Figura 9 – Un ejemplo de animación artística: círculos girando dentro de círculos



Fuente: Elaboración propia (2019 – https://www.geogebra.org/m/behy9tau).

La realización de la tarea para cada animación demanda una primera etapa de ingeniería inversa en un abordaje *top-down* de análisis y descomposición (¿cómo el movimiento del todo puede ser descrito en términos de sus elementos?), seguida por una síntesis y reconstrucción en un abordaje *bottom-up* desde los recursos y del poder de expresión que las herramientas que ofece GeoGebra. Para la primera parte, en el proceso de análisis, frecuentemente los alumnos usan el recurso de incluir imágenes de fondo en GeoGebra para hacer mediciones en algunos *frames* de la animación original. También usan el servicio https://ezgif.com/speed, que permite cambiar la velocidad de animación (hacerla más lenta ayuda mucho). Es importante recordar que, en la segunda etapa, los alumnos precisan articular varios objetos matemáticos sintética y analíticamente, con especial atención para las transformaciones geométricas. En términos de producción de animación, la estructura básica normalmente es la interpolación linear

$$P(t) = (1 - t)\,A + t\,B, \quad t \in [0, 1].$$

que al objeto A al objeto B, de un tiempo $t = 0$ a un tiempo $t = 1$ por medio de un deslizador de GeoGebra. Aquí, A y B pueden ser puntos, funciones, matrices (que codifican transformaciones), es decir, elementos de un espacio vectorial. En esta segunda etapa también ocurre un proceso de generalización: mientras los componentes de la animación original están fijos, en GeoGebra es posible incluir parámetros que pueden cambiar la animación. En el caso de la Figura 9, los parámetros incluyen el número de círculos usados (n), el factor de homotecia entre círculos consecutivos (λ), la velocidad (v), además de la posibilidad de mostrar elementos auxiliares (centros y radios de los círculos).

Observamos que, por sus propias características, este tipo de actividad se alínea con los aspectos de reconocimiento de patrones, descomposición, algoritmos y abstracción del Pensamiento Computacional (https://curriculo.cieb.net.br/), ahora considerado en la Base Nacional Común Curricular (BNCC) para la Escuela Básica de Brasil.

CONCLUSIONES

Una de las tareas del investigador en educación es hacer explícito aquello que está invisible en la práctica de la clase. Mientras el movimiento aparece en las construcciones dinámicas de GeoGebra,

sumario

en los juegos en clase, en los gestos de profesores y alumnos, la razón de hacer lo que se hace (y tal vez sin tener consciencia de ello) puede pasar desapercibida. En ese texto, procuramos traer lentes teóricos de la Psicología y de la Neurociencia para el importante papel que el movimiento juga en la enseñanza, en el aprendizaje y en nuestras vidas de manera general.

Nos gustaría finalizar este texto apuntando hacia la cuestión de la integración de la Psicología y de la Neurociencia a la Educación Matemática: mucho se ha producido recientemente en Psicología y Neurociencia, especialmente en lo que se refiere a los primeros años de escolaridad de los niños, pero esas investigaciones y sus resultados parecen no alcanzar las facultades en las universidades, tampoco la Escuela Básica. Mientras la Educación Matemática parece enfocar cuestiones de *software*, precisamos aprender con los grupos que tratan de *hardware*. Felizmente ya empezaron a aparecer trabajos sistematizados de esa integración, como el libro de Norton y Alibali (2019). Ciertamente necesitamos de más iniciativas como esa.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Carlos Tomei, Carmen Mathias, Cydara Cavedon Ripoll, Diego Lieban, Fabio Simas, Letícia Rangel, Rita de Cássia Silva Costa, Rodrigo Pessanha da Cunha, y Edilson José Curvello Machado por su disposición a leer, revisar y criticar el texto original.

REFERENCIAS

ALIBALI, Martha W.; NATHAN, Mitchell J. Embodiment in Mathematics Teaching and Learning: Evidence From Learners' and Teachers' Gestures. *Journal of the Learning Sciences,* v. 21, n. 2, p. 247-286, 2011.

BASNIAK, Maria Ivete. *A Construção de Cenários Animados no GeoGebra e O Ensino e A Aprendizagem de Funções.* Comunidad GeoGebra Latinoamericana, 2019. Recuperado de: https://youtu.be/ufpBK_CzDUQ. Accedido a: 28 feb. 2020.

BEAR, Mark F.; CONNORS, Barry W.; PARADISO, Michael A. *Neurociências: Desvendando O Sistema Nervoso.* Quarta edição. Porto Alegre: Artmed, 2017.

CHATTERJEE, Rhitu. Feature: Giving Blind People Sight Illuminates the Brain's Secrets. *Science*, AAAS, Oct. 22, 2015.

CLARK, Andy. *Being There: Putting Brain, Body, and World Together Again*. MIT Press, 1998.

EDWARDS, Laurie D.; FERRARA, Francesca; MOORE-RUSSO, Deborah. *Emerging Perspectives On Gesture and Embodiment in Mathematics.* Information Age Publishing, Inc., 2014.

FREITAS, Elizabeth de; SINCLAIR, Nathalie. *Mathematics and The Body: Material Entanglements in The Classroom*. Cambridge University Press, 2014.

GALLAGHER, Shaun. *How The Body Shapes The Mind*. Oxford University Press, 2006.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para O Aprendizado da Geometria. *Anais* do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, 1996. Recuperado de: https://goo.gl/djQ7YJ. Accedido a: 8 de maio de 2015.

HUFFMAN, David A. Realizable Configurations of Lines in Pictures of Polyhedra. In: ELCOCK, E. W.; MICHIE, D. (Eds.). *Machine Intelligence 8,* Ellis Horwood, England, p. 493-509, 1977.

KANDEL, Eric R. *et al. Princípios de Neurociências.* Quinta edição. Porto Alegre: Artmed, 2014.

KHINE, Myint Swe; AREEPATTAMANNIL, Shaljan. *STEAM Education:* Theory and Practice. Springer-Verlag, 2019.

KRAUSE, Christina M. *The Mathematics in Our Hands*: How Gestures Contribute To Constructing Mathematical Knowledge. Springer-Verla, 2015.

LAKOFF, George; NUÑEZ, Rafael. *Where Mathematics Come From: How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. Basic Books, 2001.

MACHADO, Edilson José Curvello; BORTOLOSSI, Humberto José; ALMEIDA JUNIOR, Rogério Vaz. *Explorando Geometria 2D e 3D na Escola Básica com O Software Gratuito GeoGebra para Smartphones e Tablets*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. Recuperado de: http://bit.ly/2I5sLru. Accedido a: 28 feb. 2020.

MOSER, May-Britt; ROWLAND, David C.; MOSER Edvard I. Place Cells, Grid Cells, and Memory. *Cold Spring Harbor Perspectives in Biology,* v. 7, n. 2, a021808, p. 1-15, 2015.

NORTON, Anderson; ALIBALI, Martha W. *Constructing Number: Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education.* Research in Mathematics Education, Springer-Verlag, 2019.

OSTROVSKY, Yuri *et al.* Visual Parsing After Recovery From Blindness. *Psychological Science*, v. 20, n. 12, p. 1484-1491, 2009.

PFEIFER, Rolf; BONGARD, Josh. *How The Body Shapes The Way We Think: A New View of Intelligence.* MIT Press, 2019.

SINHA, Pawan. *Learning To See in Late Childhood*. MIT Club of Northern California, 2007. Recuperado de: https://vimeo.com/384059. Accedido a: 29 feb. 2020.

SINHA, Pawan. *Pawan Sinha em como O Cérebro Aprender A Ver*. Palestra TED, 2009. Recuperado de: http://bit.ly/32AGv7c. Accedido a: 29 feb. 2020.

SINHA, Pawan et al. Autism as A Disorder of Prediction. *PNAS*, v. 111, n. 42, p. 15220-15225, 2014.

TRAPPMAIR, Andreas; HOHENWARTER, Markus. *Driving Augmented Reality: GeoGebra's New AR Features in Teaching Mathematics*. Proceedings of The 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14: Essen, Germany, 22nd to 25th of July, 2019. Recuperado de: https://bit.ly/3eP1NTA. Accedido a: 3 jun. 2020.

TVERSKY, Barbara. *Mind in Motion: How Action Shapes Thought.* Basic Books, 2019.

VOLKERT, Klaus. *The Problem of Solid Geometry.* Universität Wuppertal, 2008.

WILSON, Margaret. Six Views of Embodied Cognition. *Psychonomic Bulletin & Review,* v. 9, n. 4, p. 625-636, 2002.